УДК 669.017

Жирикова З. М., Алоев В. З., Тарчокова М. А.

Zhirikova Z. M., Aloev V. Z., Tarchokova M. A.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

APPLICATION OF MECHANICAL MODELS TO DESCRIBE THE VISCOELASTIC PROPERTIES OF POLYMER MATERIALS

Проанализированы простейшие механические модели вязкоупругого тела (модели Максвелла и Фойгта), представляющие собой последовательно и параллельно соединенные пружины и демпферы. Выявлены частные случаи поведения модели Максвелла при постоянной нагрузке и постоянной деформации. Такая модель хорошо описывает ползучесть многих материалов, таких как бетон и полимерные материалы. Показано, что уравнение, описывающее модель Фойгта, не отражает релаксации напряжений, что является её недостатком. Эта модель подходит для вязкоупругих тел, которые не имеют вязкотекучести. Приведенные в работе модели Максвелла и Фойгта не дают точного описания поведения реальных сред. Усовершенствованные модели построены используя большее количество элементов. Сложные вязкоупругие реологические модели имеют форму обобщенной модели Максвелла или модели Фойгта. Недостатком этих моделей является проведение экспериментальных исследований для определения коэффициентов модели. В рамках структурного моделирования получена стандартная обобщенная модель вязкоупругого тела. Частными случаями стандартной модели вязкоупругого тела являются модели: Максвелла, Фойгта, Кельвина и Зенера (модель стандартного линейного твердого тела). Отмечается, что уравнения, с производными целого порядка описывающие вязкоупругие свойства различных моделей не обладают достаточной точностью в отношении качества модели и имеют большое число слагаемых. В связи с этим для полного описания вязкоупругих свойств указанных моделей рекомендуется использовать аппарат дробных производных. На основе аппарата дробных производных получают обобщенную одномерную модель вязкоупругого тела с памятью. Показано, что аналоги уравнений, описывающие вязкоупругие свойства приведенных выше моделей, могут быть получены в дробно-дифференциальном обобщении.

The simplest mechanical models of viscoelastic body (Maxwell and Foigt models), which are series and parallel connected springs and dampers, have been analyzed. Private cases of Maxwell model behavior under constant load and constant deformation have been identified. Such a model well describes the creep of many materials, such as concrete and polymer materials. It is shown that the equation describing the Foigt model does not reflect stress relaxation, which is its disadvantage. This model is suitable for viscoelastic bodies that do not have viscoelastic flow. The Maxwell and Foigt models given in the paper do not provide an accurate description of the behavior of real environments. Advanced models built from a large number of elements provide sufficient accuracy in describing the behavior of viscoelastic materials. However, they require knowledge of a large amount of experimental data to determine model coefficients. Within the framework of structural modeling, a standard generic model of viscoelastic body is obtained, the private cases of which are the laws of Hook and Newton, as well as models: Maxwell, Foigt, Kelvin and Zener (model of standard linear solid body). It is noted that equations with integer derivatives describing different models have insufficient adequacy and have a large number of components. Therefore, fractional derivatives are used to accurately describe the models in question. Based on the apparatus of fractional derivatives, a generalized one-dimensional model of a viscoelastic body with memory is obtained. It has been shown that analogues of equations describing viscoelastic properties of the above models can be obtained in fractional-differential generalization.

Ключевые слова: *вязкоупругость, ползучесть, релаксация, деформация, моделирование, модуль упругости, пружина, демпфер, модель Максвелла, модель Фойгта, модель Кельвина – Фойгта, дробное дифференцирование.*

Key words: *viscoelastic, creep, relaxation, deformation, simulation, modulus of elasticity, spring, damper, Maxwell model, Foigt model, Calvin's model – Foygtf, fractional differentiation.*

Жирикова Заира Муссавна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и физики, ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарский ГАУ, г. Нальчик

Zhirikova Zaira Mussavna – Candidate of physic-mathematical sciences senior teacher in the chair of Technical mechanics and physics, FSBEI HE Kabardino-Balkarian SAU, Nalchik

Алоев Владимир Закиевич – доктор химических наук, профессор кафедры технической механики и физики, ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарский ГАУ, г. Нальчик

Aloev Vladimir Zakievich – Doctor of Chemical Sciences, professor in the chair of Technical mechanics and physics, FSBEI HE Kabardino-Balkarian SAU, Nalchik

Тарчокова Муминат Адибовна – доцент кафедры технической механики и физики, ФГБОУ ВО Кабардино-Балкарский ГАУ, г. Нальчик

Tarchokova Muminat Adibovna – Associate Professor, Department of Technical Mechanics and Physics, FSBEI HE Kabardino-Balkarian SAU, Nalchik

В настоящее время разработаны механические модели для описания механического поведения реальных сред, которые учитывают одновременные процессы упругой деформации и вязкого потока [1-3].

Необходимость построения механических моделей полимерных тел обусловлена неприменимостью обычных уравнений упругости и вязкости к полимерам. Полимеры в некоторых случаях ведут себя как упругие тела, а в других ведут себя как вязкие жидкости, поэтому их механическое поведение не подчиняется ни закону ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), ни закону Ньютона о вязком токе

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \dot{\varepsilon},$$

где:

σ – напряжение;

ε – деформация;

E – модуль упругости;

η – коэффициент вязкости.

Основными конструктивными элементами механических моделей обычно являются упругий элемент (пружина) с определяющим отношением в виде закона Гука и вязкий элемент (демпфер) с определяющим соотношением ньютоновского типа.

Известны различные способы соединения (параллельное, последовательное и смещенное) пружины и демпфера. Подобным соединениям соответствуют аналоговые механические модели.

Простейшая механическая модель вязкоупругого материала, состоящая из пружины и демпфера, была предложена Максвеллом. Эта модель представляет собой последовательное соединение упругого элемента (пружины), характеризующаяся модулем упругости E и вязкого элемента (демпфера), характеризующаяся вязкостью η (рис. 1). Пусть упругий элемент (пружина) характеризуется деформацией ε_1 и напряжением σ_1, а вязкий элемент - ε_2 и σ_2. Очевидно, что растягивающая сила и напряжение при одном и том же поперечном сечении одинаковы вдоль действия сил, поэтому $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, а общая деформация складывается из деформации частей $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

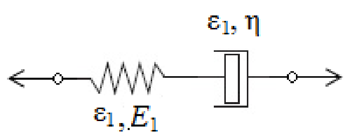

Рисунок 1

Известно, что $\sigma_1 = E \cdot \varepsilon_1$ и $\sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon}_2$.

Учитывая, что скорости деформации складываются в суммарную скорость ($\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$), получаем:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}\text{; или } \sigma + \frac{\eta}{E}\frac{d\sigma}{dt} = \eta\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Введем обозначения: $\frac{\eta}{E} = a$; $\eta = b$.

Тогда окончательно получаем:

$$\sigma + a\frac{d\sigma}{dt} = b\frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{или}$$

$$\sigma(t) + a\frac{d\sigma(t)}{dt} = b\frac{d\varepsilon(t)}{dt}.$$

Это уравнение описывает модель Максвелла.

Рассмотрим частные случаи поведения модели Максвелла при постоянной нагрузке (σ = = const) и постоянной деформации (ε = const).

1) Случай ползучести. Если σ = const, то $\frac{d\varepsilon}{dt} = \text{const}$ и деформирование ничем не ограничено, т.е.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\cdot\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta},$$

при σ = const; $\frac{d\sigma}{dt} = 0$,

тогда $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}$ или $d\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}dt$.

Проинтегрировав это выражение, получаем

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}t + \varepsilon_0.$$

Такая модель поведения материала хорошо описывает ползучесть многих материалов, например бетона и полимерных материалов.

2) Случай релаксации напряжения. Пусть элемент загружен некоторым напряжением σ_0 и деформация зафиксирована (ε = const).

В этом случае $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$. Тогда

$$\frac{1}{E}\cdot\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0.$$

После разделения переменных и интегрирования, получим:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta}dt; \ \ln\sigma - \ln\sigma_0 = -\frac{E}{\eta}t.$$

Если $E/\eta = \tau$ – время релаксации (время, в течение которого напряжение уменьшается в e раз), то $\sigma = \sigma_0 e^{-\tau t}$.

Как видно из этой формулы, при $t \to \infty$ $\sigma \to 0$. Однако, в реальных телах это не наблюдается. Чтобы описать релаксацию напряжения более точно, необходимо использовать более сложные механические модели.

2. Модель Фойгта представляет собой вязкоупругую систему, состоящую из параллельно соединенных пружины и демпфера (рис. 2). В этом случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, а общее напряжение равно $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

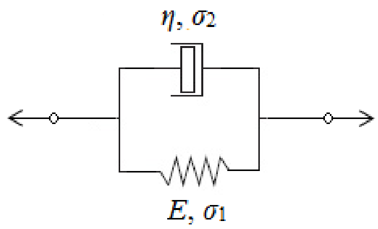

Рисунок 2

Учитывая, что $\sigma_1 = E\cdot\varepsilon$ и $\sigma_2 = \eta\cdot\dot{\varepsilon}$, получим:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon + \eta\cdot\dot{\varepsilon} \text{ или } \sigma = E\cdot\varepsilon + \eta\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Из этого уравнения следует, что при $\frac{d\varepsilon}{dt}$, а значит при ε = const, и напряжение σ = const. Это означает, что модель Фойгта не описывает релаксацию напряжения.

Введя обозначения: $E = m$ и $\eta = b$, получим:

$$\sigma(t) = m\varepsilon(t) + b\frac{d(\varepsilon)}{dt}.$$

Эта дифференциальная зависимость является определяющим соотношением для модели Фойгта и представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение складывается из общего решения аналогичного однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, т.е.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

где:

$\varepsilon_1 = -\frac{\sigma}{E}e^{-\frac{E}{\eta}t}$ – общее решение;

$\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E}$ – частное решение.

Следовательно, общее решение равно:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma}{E} \cdot e^{-\frac{E}{\eta}t} = \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right).$$

Введя обозначение $\tau_3 = E / \eta$ (время запаздывания), получим:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_3}}\right).$$

Из этого уравнения следует, что при очень большом времени деформация ε стремится к постоянному значению σ/E, а при любом другом меньшем времени она составляет часть от общей деформации, т.е. наблюдается некоторое запаздывание в развитии деформации.

Двухпараметрические модели Максвелла и Фойгта не соответствуют требованиям для описания свойств полимерных материалов. Переход к трехпараметрической модели позволит увеличить точность описания.

Эта модель (модель Кельвина) состоит из последовательного соединения упругого элемента и элемента Фойгта (рис. 3), являются обобщением модели Кельвина и Фойгта.

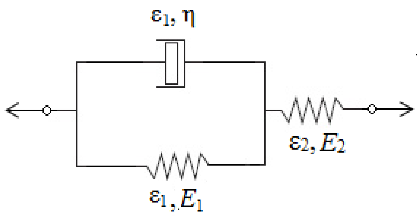

Рисунок 3

Для общей деформации данной модели характерно выражение

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

где:

ε_1 – деформация элемента Фойгта, а ε_2 – деформация упругого элемента.

Так как $\sigma_1 = \sigma_2$, то для элемента Фойгта, получаем что

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon_1 + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_1,$$

а для другого – $\varepsilon_2 = \sigma / E_2$.

Так как $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, то $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$, отсюда получаем, что $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} - \dot{\sigma} / E_2$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon - \sigma / E_2$.

Подставляя выражение для ε_1 и $\dot{\varepsilon}_1$ в уравнение элемента Фойгта получаем, что

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta}\sigma = \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta}\varepsilon + E_2\dot{\varepsilon}.$$

Введя обозначения $a = \dfrac{E_1 + E_2}{\eta}$; $b = E_2$; $m = \dfrac{E_1 \cdot E_2}{\eta}$, получаем:

$$\left[1 + a\frac{d}{dt}\right]\sigma(t) = \left[m + b\frac{d}{dt}\right]\varepsilon(t).$$

Это уравнение описывает модель линейного твердого тела и явление ползучести и релаксацию напряжения. Однако количественно эта модель плохо согласуется с экспериментами.

Трехпараметрическая модель, состоящая из одной пружины и двух демпферов (рис. 4) описывается уравнением:

$$\left[1 + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E}\frac{d}{dt}\right]\sigma(t) = \left[\eta_1\frac{d}{dt} + \frac{\eta_1\eta_2}{E}\frac{d^2}{dt^2}\right]\varepsilon(t).$$

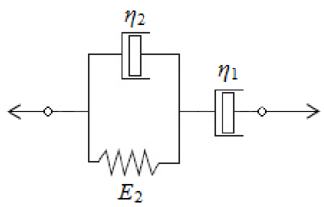

Рисунок 4

Увеличение количества элементов за счет последовательного соединения моделей Максвелла и Фойгта позволит более точно описать вязкоупругие свойства материалов (рис. 5).

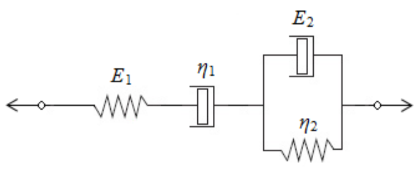

Рисунок 5

Эта модель описывается уравнением:

$$\alpha_0\sigma(t) + \alpha_1\frac{d\sigma(t)}{dt} + \alpha_2\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} = \\ = \beta_0\varepsilon(t) + \beta_1\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \beta_2\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2},$$

где:

величины α_1, α_2, β_1, β_2 находят с помощью коэффициентов E и η.

Эта модель описывает мгновенную упругую реакцию, вязкое течение и упругую релаксацию.

Усовершенствованные модели построены, используя большее количество элементов. Сложные вязкоупругие реологические модели имеют форму обобщенной модели Максвелла или модели Фойгта. Недостатком этих моделей является проведение экспериментальных исследований для определения коэффициентов модели.

Обобщая рассмотренные выше модели, в рамках структурного моделирования получена [4] стандартная обобщенная модель вязкоупругого тела.

$$\sigma(t)+\sum_{k=1}^{p} a_k \frac{d^k}{dt^k}\sigma(t)=m\varepsilon(t)+\sum_{k=1}^{q} b_k \frac{d^k}{dt^k}\varepsilon(t),$$

где:

$\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – напряжение и деформация тела в момент времени t;

a_k, b_k, m – заданные постоянные величины, представляющие собой комбинацию коэффициентов E и η и зависят от способа соединения элементов в модели

Частными случаями стандартной модели вязкоупругого тела являются законы: Гука $\sigma(t) = E_0\varepsilon(t)$ и Ньютона $\sigma(t)=\eta\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$, а также следующие модели:

- модель Фойгта

$$\sigma(t)=E_0\varepsilon(t)+\eta\frac{d\varepsilon(t)}{dt};$$

- модель Максвелла

$$E_0\sigma(t)+\eta\frac{d\sigma(t)}{dt}=\eta\frac{d\varepsilon(t)}{dt},$$

- модель Кельвина

$$\left(E_1+E_2\right)\sigma(t)+\eta\frac{d\sigma(t)}{dt}=E_1E_2\varepsilon(t)+\eta E_2\frac{d\varepsilon(t)}{dt},$$

- модель Зенера

$$E_1\sigma(t)+\eta\frac{d\sigma(t)}{dt}=E_1E_2\varepsilon(t)+\eta\left(E_1+E_2\right)\frac{d\varepsilon(t)}{dt},$$

где:

E_0, E_1, E_2 – модули соответствующих упругих элементов, η – коэффициент демпфирования.

Авторы работы [5] предлагают для описания вязкоупругих свойств одномерную модель вязкоупругого тела с применением аппарата дробных производных:

$$\sigma(t)+\sum_{k=1}^{n} b_k D^{\alpha_k}\sigma(t)=E_0\varepsilon(t)+\sum_{k=1}^{m} E_k D^{\beta_k}\varepsilon(t),$$

где:

$\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ – напряжение и деформация тела в момент времени t;

a_k, $b_k E_0$ – заданные величины;

D^{β} и D^{α} – операторы дробного дифференцирования.

Для моделирования многих вязкоупругих свойств материалов достаточно ограничиться моделью

$$\sigma(t)+bD^{\alpha}\sigma(t)=E_0\varepsilon(t)+E_1D^{\beta}\varepsilon(t),$$

которая при достаточно малом E_0 сводится к уравнению

$$\sigma(t)=E_1D^{\beta}\varepsilon(t),$$

где:

$\sigma(t)$ – напряжение;

$\varepsilon(t)$ – деформация;

E_1 и $0 < \beta < 1$ – параметры материала.

Здесь $D^{\beta}\langle x(t)\rangle=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^1\frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau$ – дробная производная Капуто.

Определяющие уравнения для вышеперечисленных моделей с использованием аппарата дробных производных в дробно-диффе-ренциальном обобщении имеют вид:

1. $\sigma(t)+\tau_0^{\alpha}D_t^{\alpha}[\sigma(t)]=E\tau_0^{\beta}D_t^{\beta}[\varepsilon(t)],$
   $0\langle\alpha,\ \beta\langle 1$
   (для модели Максвелла);
2. $\sigma(t)=E\left[\tau_0^{\alpha}D_t^{\alpha}[\varepsilon(t)]+\tau_0^{\beta}D_t^{\beta}[\varepsilon(t)]\right],$
   $0\le\alpha\langle\beta\le 1$
   (для модели Кельвина);
3. $\sigma(t)+\tau_0^{\alpha}D_t^{\alpha}\sigma(t)=E\left[\varepsilon(t)+\theta_0^{\alpha}D_t^{\alpha}[\varepsilon(t)]\right],$
   $0\langle\alpha\langle 1$
   (для модели стандартного линейного твердого тела).

Это эмпирическая модель, предложенная Капуто и Майнарди [6,7] позволяет наиболее точно описать поведение реальных материалов.

Результаты исследования. Обзор существующих механических моделей позволяет сделать вывод, что модели Максвелла и Фойгта не описывают в полной мере поведение реальных материалов. Трех- и четырехпараметрические модели обеспечивают достаточную точность при описании поведения вязкоупругих материалов. Недостатком этих моделей является проведение экспериментальных исследований для определения коэффициентов модели

Уравнения, с производными целого порядка, описывающие вязкоупругие свойства различных моделей, не обладают достаточной точностью в отношении качества модели и имеют большое число слагаемых. В связи с этим, для полного описания вязкоупругих свойств указанных моделей рекомендуется использовать аппарат дробных производных.

Выводы. Использование аппарата дробных производных в реологических моделях позволяет наиболее точно описать вязкоупругие свойства полимерных материалов.

Литература

1. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров; пер. с англ. – М.: ИЛ. 1963. – 534 с.
2. *Тобольский А.* Свойства и структура полимеров; пер. с англ. – М.: Химия, 1964. – 322 с.
3. *Тагер А.А.* Физико-химия полимеров. – М.: Химия, 1978. – 544 с.
4. *Роботнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712с.
5. *Бегли Р.Л., Торвик П.Дж.* Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка – новый подход к расчету конструкции с вязкоупругим демпфированием. – Аэрокосмическая техника, 1984. – Т.2. – №2. – С. 84-93.
6. *Caputo M., Mainardi F.* Linear models of dissipation in anelastic solids // La Rivista del Nuovo Cimento, 1971. – Vol. 1. – N 2. – Pp. 161-198.
7. *Caputo M., Mainardi F.* A New Dissipation Model Based on Memory Mechanism // Pure and Applied Geophysics (Pageoph), 1971. – Vol. 91. – Pp. 134-147.

References

1. *Ferri Dzh.* Vyazkouprugie svojstva polime-rov; per. s angl. – M.: IL. 1963. – 534 s.
2. *Tobol'skij A.* Svojstva i struktura polimerov; per. s angl. – M.: Himiya, 1964. – 322 s.
3. *Tager A.A.* Fiziko-himiya polimerov. – M.: Himiya, 1978. – 544 s.
4. *Robotnov Yu.N.* Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. – M.: Nauka, 1988. – 712s.
5. *Begli R.L., Torvik P. Dzh.* Differencial'noe ischislenie, osnovannoe na proizvodnyh drobnogo poryadka – novyj podhod k raschetu konstrukcii s vyazkouprugim dempfirovaniem. – Aerokosmicheskaya tekhnika, 1984. – T. 2. – №2. – S. 84-93.
6. *Caputo M., Mainardi F.* Linear models of dissipation in anelastic solids // La Rivista del Nuovo Cimento, 1971. – Vol. 1. – N 2. – Pp. 161-198.
7. *Caputo M., Mainardi F.* A New Dissipation Model Based on Memory Mechanism // Pure and Applied Geophysics (Pageoph), 1971. – Vol. 91. – Pp. 134-147.